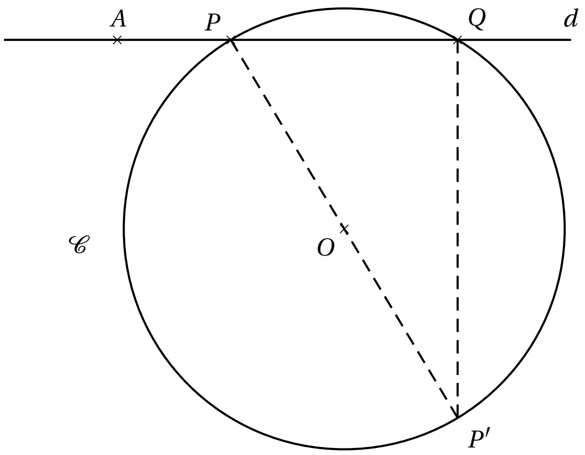
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°3

Dans tous les exercices les repères sont orthonormaux

EXERCICE 1

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, re rayon r et A est un point fixé du plan. d est une droite passant par A et coupant $\mathscr{C}$ en deux points P et Q.



Le but du problème est d'établir la propriété suivante :

Quelle que soit la droite d passant par A, coupant le cercle $\mathscr{C}$ en deux points P et Q, le produit scalaire $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}$ est constant.

1. Soit P' le point diamétralement opposé à P. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'}$. (1,5 point)

   $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'}=\overrightarrow{AP}.\left(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP'}\right)=\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{QP'}$
   Le triangle PQP' étant inscrit dans un cercle de diamètre $[PP']$, il est rectangle en Q, donc $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{QP'}=0$.
   On a donc bien $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'}=\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}$

2. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'}=AO^2-r^2$ (1,5 point)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'}&=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right).\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP'}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right).\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OP}\right)\\&=\overrightarrow{AO}^2-\overrightarrow{OP}^2\\&=AO^2-r^2\end{aligned}$$

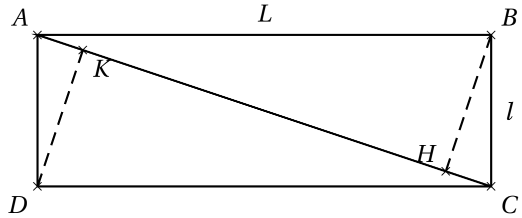
3. Conclure. (1 point)

   $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'}=AO^2-r^2$ donc ce produit scalaire est constant et ne dépend ni et P, ni de Q, mais seulement de la distance du point au centre du cercle et du rayon du cercle. Ainsi, pour une autre droite d_1 coupant le cercle en P_1 et Q_1, on aurait encore $\overrightarrow{AP_1}.\overrightarrow{AQ_1}=AO^2-r^2$. On a donc la propriété :

Propriété.
Quelle que soit la droite d passant par A et coupant le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r en P et Q, on a $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}=AO^2-r^2$.
On appelle cette quantité la puissance du point A par rapport au cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2

$ABCD$ est un rectangle de longueur L et de largeur l. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).



1. Calculer HK en fonction des longueurs des côtés L et l. (On pourra évaluer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$). (1,5 point)+ (1,5 point)+ (1 point)

   On a d'une part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}&=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)\\&=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right).\left(-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}\right)\\&=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right)\\&=\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{DA}^2\\&=CD^2-DA^2\\&=L^2-l^2\end{aligned}$$

   Et d'autre part :
   $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{HK}$ car $\overrightarrow{HK}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BD}$ sur la direction de $\overrightarrow{CA}$.
   Donc $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{HK}=CA\times HK$.
   Or $CA=\sqrt{L^2+l^2}$.

   Il vient finalement : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}=L^2-l^2=\sqrt{L^2+l^2}\times HK$ et, comme $\sqrt{L^2+l^2}\neq 0$, on a

$$HK=\frac{L^2-l^2}{\sqrt{L^2+l^2}}$$

2. Comment choisir L et l pour avoir $AC=2HK$? (1 point)

   On a vu que $AC=\sqrt{L^2+l^2}$, on a donc :

$$\begin{aligned}AC=2HK&\Leftrightarrow\sqrt{L^2+l^2}=2\frac{L^2-l^2}{\sqrt{L^2+l^2}}\\&\Leftrightarrow L^2+l^2=2(L^2-l^2)\\&\Leftrightarrow 3l^2=L^2\\&\Leftrightarrow\sqrt{3}l=L\end{aligned}$$

   Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de l'aire du rectangle $ABCD$. (1 point)

   La figure étant symétrique par rapport au centre du rectangle, on a $\mathscr{A}_{BHDK}=2\mathscr{A}_{BHK}$ et $\mathscr{A}_{ABCD}=2\mathscr{A}_{ABC}$.
   Or $2\mathscr{A}_{BHK}=2\left(\frac{HK\times BH}{2}\right)=HK\times BH$ et $2\mathscr{A}_{ABC}=AC\times BH=2HK\times BH=2\times 2\mathscr{A}_{BHK}$ car $AC=2HK$, donc

$$\mathscr{A}_{BHDK}=\frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABCD}$$